EL INFINITO

ESTALMAT Catalunya

Societat Catalana de Matemàtiques

feemcat
Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

Guillem Perarnau Llobet
guillem.perarnau@upc.edu
UPC y CRM

Guillermo Pérez Blanco
guillermoperez.eis@gmail.com
INS Nou Barris

Amb el patrocini de:

Gobierno de España — Ministerio de Ciencia e Innovación
FECYT — Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología
Generalitat de Catalunya — Departament d'Educació
Institut d'Estudis Catalans — MCMVII
CASIO — Divisió Educativa
APOTEMA

Contexto

Grupo: 2º curso de Estalmat, finales de curso.

Objetivos:

- familiarizarse con el concepto de *infinito*
- conocer problemas y paradojas clásicos relacionados
- resolver problemas sencillos con sumas infinitas
- introducir la noción de solución estimada a un problema

Motivación

¿Qué es el *infinito*?

Es más que probable que todos nuestros alumnos conozcan la palabra, pero, ¿conocen su significado? discutimos que cosas son infinitas.

Motivación

¿Qué es el *infinito*?

Es más que probable que todos nuestros alumnos conozcan la palabra, pero, ¿conocen su significado? discutimos que cosas son infinitas.

Por ejemplo:

¿Caben infinitas pelotas de Ping Pong en el aula habitual?

Motivación

¿Qué es el *infinito*?

Es más que probable que todos nuestros alumnos conozcan la palabra, pero, ¿conocen su significado? discutimos que cosas son infinitas.

Por ejemplo:

¿Caben infinitas pelotas de Ping Pong en el aula habitual?

1,000? 1,000,000? 1,000,000,000?

Un poco de historia

El símbolo del infinito apareció cuando el matemático inglés **John Wallis (1616 - 1703)** se preguntó cuántas rectas caben en un plano, lo que dió lugar al siguiente cociente:

$$\frac{1}{0} = a$$

y vio que ***a*** no podía ser ningún número real.

John Wallis puso nombre al resultado: **infinito**, y lo escribió como **∞**.

El problema de los números pares

¿Cuántos números pares y cuántos impares hay del 1 al 100?

¿Cuántos números naturales hay en total?

¿Cuántos números naturales pares hay?

¿Cuántos números naturales impares?

¿Hay el mismo número de pares que de naturales?

¡Menuda contradicción!

El Hotel de Hilbert

Hilbert imaginó un hotel extraordinario con infinitas habitaciones numeradas 1, 2, 3, 4, …, que presumía de poder alojar siempre a cualquier número de huéspedes. Una noche, el hotel estaba completamente lleno, con todas sus infinitas habitaciones ocupadas, cuando llegó un nuevo cliente…

- ¿Cómo lo hizo la directora para asignarle una habitación al nuevo cliente?
- ¿Y si hubiesen llegado 100 nuevos clientes?
- ¿Que pasaría si llegaran tantos clientes como habitaciones tiene el hotel?

El álgebra del infinito

El Hotel de Hilbert nos demuestra que: **$\infty+1=\infty$, $\infty+100=\infty$, $\infty+\infty=\infty$**

a) $\infty+2$

b) $\infty-40$

c) $1-\infty$

e) $\infty-\infty$

f) $3\cdot\infty$

g) $\left(-5\right)\cdot\infty$

h) $\infty\cdot\infty$

i) $\infty\cdot\left(-\infty\right)$

j) ∞/∞

¿Cuánto es **1+1+1+1+....** ? ¿Si sumamos infinitos números siempre da infinito?

La paradoja de Zenón

Aquiles se enfrenta a una tortuga en una carrera. Como él es más rápido, le da una distancia de ventaja a la tortuga.

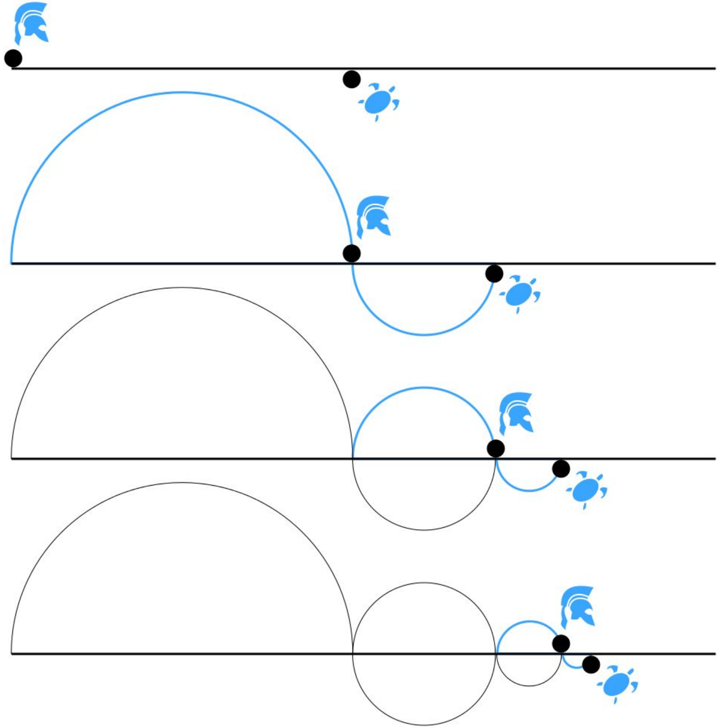
Cuando empieza la carrera, Aquiles llega rápidamente al punto de partida de la tortuga, pero esta ya no está allí: se ha desplazado una pequeña distancia.

Aquiles avanza la nueva distancia que los separa pero, al llegar donde estaba la tortuga, esta ha vuelto a desplazarse.

Esto sucede siempre… de manera que Aquiles nunca alcanza la tortuga.

¿Qué sucede?

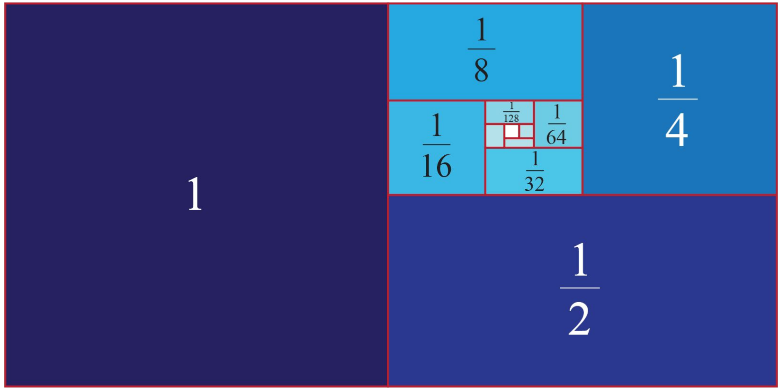
La paradoja de Zenón



Si suponemos que la velocidad és 1 unidad por segundo y que la distancia inicial entre ellos es de una unidad, el tiempo transcurrido es:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\ldots = 2$$

Hablamos de la serie geométrica!



La serie armónica...

¿Cuál es el resultado de la siguiente suma?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \ ?$$

La serie armónica no...

Encontramos cotas inferiores para:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad >$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \quad >$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \quad >$$

La serie armónica no es...

Encontramos cotas inferiores para:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} >$$

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

La serie armónica no es convergente

Y por tanto:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$$

Serie armónica en acción: Hércules y la hormiga

Hércules propone un reto a una hormiga. La hormiga camina sobre una cuerda elástica circular de 1 metro de longitud. Cada segundo avanza 1 cm, pero en ese mismo instante Hércules estira la cuerda, aumentando su longitud en 1 metro más que antes. Este proceso se repite indefinidamente.

Podrá la hormiga dar la vuelta completa?

El problema de Fermi

¿Cuántas pelotas de ping-pong caben en el aula?

- volumen en m^3 del aula?
- radio y volumen de una pelota de ping-pong?
- forma más óptima de colocar las pelotas?

Infinitas gracias
por vuestra atención